



TITLE:

ソリトン相互作用の有効ポテンシャルⅢ (非線形波動現象の研究の新たな進展)

AUTHOR(S):

角島, 浩

CITATION:

角島, 浩. ソリトン相互作用の有効ポテンシャルⅢ (非線形波動現象の研究の新たな進展). 数理解析研究所講究録 2012, 1800: 120-129

ISSUE DATE:

2012-07

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/173023>

RIGHT:

ソリトン相互作用の有効ポテンシャル III

富山大・工 角 畠 浩 (Hiroshi Kakuhata)

Faculty of Engineering, University of Toyama

1 はじめに

非線形波動であるにもかかわらずソリトンは衝突しても壊れない波であり、ソリトン同士の衝突によって軌道が変化し位相がシフトすることはよく知られている [1]。この衝突の際にソリトンを点粒子と見なせばソリトン間に力がはたらいているように見えるであろう。ソリトン解からソリトンの相互作用の様子を再現するソリトン粒子の力学を定式化することを目指して、これまでに外部磁場中の内部電流を持つストリングの運動を記述する連立非分散方程式のソリトンに対して effective force とその有効ポテンシャルを求めて来た [2, 3]。このときいくつかの問題点があったが、それぞれのソリトン粒子にはたらく effective force の和が 0 にならないことが最大の問題であった。これは作用反作用の法則が成り立たず、並進不変性が破れていることを意味し、有効ポテンシャルの記述が不十分なものであることも意味した。本稿ではこの問題を考察し、「ゲージ場」の導入により並進不変なソリトン粒子の力学を構成した。

2 連立非分散方程式とソリトン解

連立非分散方程式

$$\partial_\tau^2 \mathbf{r} - \partial_\sigma^2 \mathbf{r} = (\partial_\tau \mathbf{r} + \partial_\sigma \mathbf{r}) \times \mathbf{B}, \quad (1)$$

は外部電流 \mathbf{J} が作る外部磁場 $\mathbf{B} = \mathbf{J} \times \mathbf{r}$ 中の \mathbf{J} 方向に張られた内部電流を持つストリングの運動を記述する。ここに、 $\mathbf{r} = (X, Y, Z)$ はストリングの位置ベクトル、 τ は時間、 σ はストリングに沿うパラメータである。左辺はストリング自体の運動に対応し、右辺が \mathbf{J} がつくる磁場とストリングの内部電流との相互作用に対応する。ソリトン解は非線形な外部 Lorentz 力と線形なストリング張力の釣り合いによって形成され、ソリトンは 3 次元 Euclidean 空間 \mathbb{R}^3 中で \mathbf{J} 方向に沿って双方向に伝播する。また、 \mathbf{J} 方向を軸としてその周りに回転するため、ソリトンは 3 次元的に振る舞う [4, 5]。

具体的にソリトン解を得るため、連立非分散方程式 (1) を成分で書き下す。以下、簡単のため、

$J = (0, 0, 1)$ とすると, 非線形 Klein-Gordon 型の連立方程式

$$\begin{aligned}\partial_\tau^2 X - \partial_\sigma^2 X &= -(\partial_\tau Z + \partial_\sigma Z)X, \\ \partial_\tau^2 Y - \partial_\sigma^2 Y &= -(\partial_\tau Z + \partial_\sigma Z)Y, \\ \partial_\tau^2 Z - \partial_\sigma^2 Z &= (\partial_\tau X + \partial_\sigma X)X + (\partial_\tau Y + \partial_\sigma Y)Y\end{aligned}\quad (2)$$

になる。この方程式に対する双線形方程式

$$\begin{aligned}(D_\tau^2 - D_\sigma^2 + 1)f \cdot q &= 0, \\ (D_\tau^2 - D_\sigma^2 + 1)f \cdot q^* &= 0, \\ (D_\tau - D_\sigma)^2 f \cdot f - \frac{1}{2}q^* q &= 0\end{aligned}\quad (3)$$

は, 双線形変換

$$\begin{aligned}X &= \operatorname{Re}\left(\frac{q}{f}\right), \quad Y = \operatorname{Im}\left(\frac{q}{f}\right), \\ Z &= \sigma + 2(\partial_\tau - \partial_\sigma) \ln f\end{aligned}\quad (4)$$

から得られる。ここで, f は実関数, q は複素関数, D_τ と D_σ は双線形演算子であり, 「 $*$ 」は複素共役を表す。

この双線形方程式 (3) から, 1 ソリトン解

$$q = e^\eta, \quad f = 1 + b^2 e^{2\eta}$$

を得る。ここで位相は $\eta = k\sigma - \omega\tau + \eta_0$, 係数 b は $b = \frac{1}{2(\omega + \omega^* - k - k^*)}$, 分散関係は $\omega^2 - k^2 = -1$, である。また, η_0 , k , ω とはそれぞれ複素初期位相, 複素波数, および複素振動数である。実空間 R^3 では (2) ソリトン解は

$$\begin{aligned}X &= A \cos \varphi \operatorname{sech} \zeta, \\ Y &= A \sin \varphi \operatorname{sech} \zeta, \\ Z &= Z_0 + \sigma - A \tanh \zeta\end{aligned}$$

と表され, 位相 η の実部 ζ は並進運動に, 虚部 φ は回転運動に対応する。ここに位相 ζ と φ , および波数 γ と振幅 A はそれぞれ

$$\begin{aligned}\zeta &= \gamma(\sigma - v\tau) + \delta, \quad \varphi = \Omega(\tau - v\sigma) + \theta, \\ \gamma &= \sqrt{\frac{1 - (1 - v^2)\Omega^2}{1 - v^2}}, \\ A &= 2\gamma(1 + v)\end{aligned}$$

で与えられ, v は位相速度, Ω は角速度, θ と δ はそれぞれ回転と並進の実初期位相である。これらから, ソリトンは位相速度 v が大きくなれば, 振幅が大きくなり, また, Z はキンク型であることがわかる。ただし, 解が実数であるために, $-1 < v < 1$ と $\frac{-1}{\sqrt{1 - v^2}} < \Omega < \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}$ を満足する必要がある。またソリトンは位相速度と角速度によってループを形成したりしなかったりし, このためもあるソリトン相互作用にはいろいろなパターンがある。

(3) の 2 ソリトン解は

$$q = e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + c_1^2 e^{\eta_1 + \eta_1^* + \eta_2} + c_2^2 e^{\eta_1 + \eta_2 + \eta_2^*}, \quad (5)$$

$$f = 1 + b_1^2 e^{\eta_1 + \eta_1^*} + b_{12}^{*2} e^{\eta_1^* + \eta_2} + b_{12}^2 e^{\eta_1 + \eta_2^*} + b_2^2 e^{\eta_2 + \eta_2^*} + d_{12}^2 e^{\eta_1 + \eta_1^* + \eta_2 + \eta_2^*} \quad (6)$$

である。ここで係数は以下で与えられる：

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2(\omega_n + \omega_n^* - k_n - k_n^*)}, \quad (n = 1, 2), \\ b_{12} &= \frac{1}{2(\omega_1 + \omega_2^* - k_1 - k_2^*)}, \\ c_1 &= 2(\omega_1 - \omega_2 - k_1 + k_2)b_1b_{12}^*, \\ c_2 &= 2(\omega_1 - \omega_2 - k_1 + k_2)b_2b_{12}, \\ d_{12} &= 4|\omega_1 - \omega_2 - k_1 + k_2|^2b_1b_2|b_{12}|^2. \end{aligned}$$

ここでも位相は $\eta_n = k_n\sigma - \omega_nt + \delta_n + i\theta_n$ ($n = 1, 2$)、分散関係は $\omega_n^2 - k_n^2 = -1$ である。1ソリトン解のときと同様のパラメトリゼーションで、位相速度 v_n と角速度 Ω_n により表すことができる。

3 ソリトン相互作用

この節では非分散連立方程式の2ソリトン解 (5) と (6) を用いて、 z - x 平面内のソリトンの相互作用を簡単に紹介する。以下では両ソリトンの角速度 Ω は 0 で、同じ大きさの位相速度 v と $-v$ での正面衝突のみを考える。この場合には衝突の仕方によって3つのパターンがある。すなわち、正（負）の振幅同士の衝突のときは、小さい相対速度では弾くように衝突し、大きい相対速度では小さいループが大きいループの中を回る。正と負の振幅の衝突のときには、小さいループが一時的に消え、大きいループがさらに大きくなる (図1)。これらの衝突の様子を見ると、正（負）の振幅同士の衝突では斥力が、正と負の振幅の衝突では引力がはたらいているように見える。

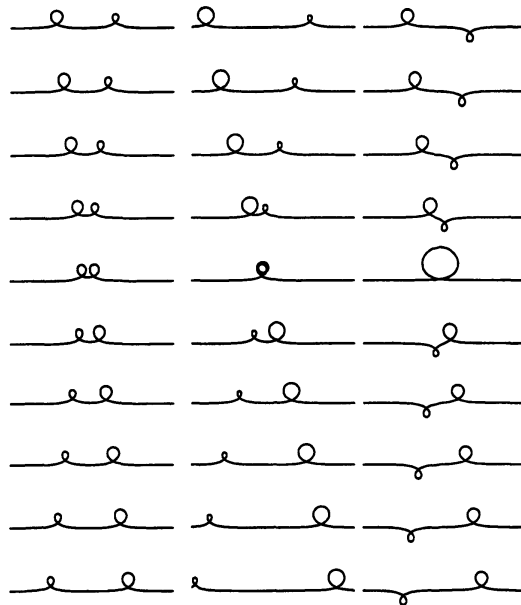


図1 $v = 0.12,$

4 ソリトンの軌道

前節のようなソリトン相互作用をソリトン粒子の相互作用と見なそうとすると、ソリトンの位置を τ の関数として表せば加速度を知ることができる。加速度がわかればソリトン間にはたらく力が引力か斥力かを知ることができるだろう。そこでソリトンの位置をソリトンのピークの位置であるとして、ソリトンの位置を求める。以下では、前節と同じ状況を考え、位相速度が v の右進行（大きい）ソリトンを soliton-1, $-v$ の左進行（小さい）ソリトンを soliton-2 と呼ぶことにして、同一平面内での衝突のみを考察する。 $\Omega = 0$ かつ同一平面内なので z 成分のみを考慮する。2つのソリトンが大きさが v の逆向きの位相速度で正面衝突するとき、2つのソリトンの波数 γ は等しく $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$ になり、このことが重要である。振幅と位相は以下で与えられる：

$$\begin{aligned} A_1 &= 2\gamma(1+v), A_2 = 2\gamma(1-v), \\ \eta_1 &= \gamma(\sigma - v\tau) + \delta_1, \eta_2 = \gamma(\sigma + v\tau) + \delta_2, \\ \xi_1 &= \theta_1, \xi_2 = \theta_2, \theta_n = 0 \text{ or } \pi, (n = 1, 2). \end{aligned}$$

このとき、双線形方程式 (3) の従属変数 f は

$$\begin{aligned} f &= \beta(\tau) + v^2 \cosh 2\gamma\sigma, \\ \beta(\tau) &= \cosh 2\gamma v\tau + (1-v^2) \cos \theta_{12} \end{aligned}$$

のように非常に簡単な形になる。ここで、 θ_{12} は回転の初期位相の差で $\theta_{12} = \theta_2 - \theta_1$ であり任意の θ_n で有効であるが、同一平面内なのでその値は 0 か π である。

Z はキंक型なので、ソリトンのピークは

$$\partial_\sigma^2 Z = 0, (\partial_\sigma^3 Z > 0)$$

で与えられる。一般の場合には超越方程式になるため解を求めるのは困難であるが、今、2つのソリトンの波数 γ が等しいため、この方程式は、 $e^{2\gamma\sigma}$ の4次方程式

$$\begin{aligned} v^2[v \sinh 2\gamma v\tau - \beta(\tau)]e^{8\gamma\sigma} - 2[v\beta(\tau) \sinh 2\gamma v\tau + \beta(\tau)^2 - 2v^4]e^{6\gamma\sigma} \\ - 6[v^3 \sinh 2\gamma v\tau]e^{4\gamma\sigma} - [v\beta(\tau) \sinh 2\gamma v\tau - \beta(\tau)^2 + 2v^4]e^{2\gamma\sigma} \\ + v^2[v \sinh 2\gamma v\tau - \beta(\tau)] = 0 \quad (7) \end{aligned}$$

に帰着する。4次方程式であるから、この方程式の厳密解を求めることができる。残念ながら、厳密解は非常に複雑なため、ソリトン同士が十分離れているときを考察し、 $e^{2\gamma v\tau}$ の0次と1次のみでソリトンのピークの位置 σ_n ($n = 1, 2$) を表すことにする。十分遠方で、soliton-1 の位置、 σ_1 、と soliton-2 の位置、 σ_2 、はそれぞれ、漸近的に $\sigma_1 \approx v\tau$ と $\sigma_2 \approx -v\tau$ で与えられるので、衝突前 ($\tau \rightarrow -\infty$) には、 τ - σ 空間での soliton-1 の位置は

$$e^{2\gamma\sigma_1} \approx \frac{v^2[1 + 2(1-v) \cos \theta_{12} e^{2\gamma v\tau}]e^{2\gamma v\tau}}{1 + 2(1-v)(2+v) \cos \theta_{12} e^{2\gamma v\tau}} \quad (8)$$

soliton-2 の位置は

$$e^{2\gamma\sigma_2} \approx \frac{1 + 2(1+v)(2-v) \cos \theta_{12} e^{2\gamma v\tau}}{v^2[1 + 2(1+v) \cos \theta_{12} e^{2\gamma v\tau}]e^{2\gamma v\tau}} \quad (9)$$

になる。同様に、衝突後 ($\tau \rightarrow +\infty$) では、soliton-1 の位置は

$$e^{2\gamma\sigma_1} \approx \frac{1 + 2(1-v)(2+v) \cos \theta_{12} e^{-2\gamma v\tau}}{v^2 [1 + 2(1-v) \cos \theta_{12} e^{-2\gamma v\tau}] e^{-2\gamma v\tau}}, \quad (10)$$

soliton-2 の位置は

$$e^{2\gamma\sigma_2} \approx \frac{v^2 [1 + 2(1+v) \cos \theta_{12} e^{-2\gamma v\tau}] e^{-2\gamma v\tau}}{1 + 2(1+v)(2-v) \cos \theta_{12} e^{-2\gamma v\tau}} \quad (11)$$

になる。なお、これらは、 $\cos \theta_{12} = 1$ ($\theta_{12} = 0$) のときは正則であるが、 $\cos \theta_{12} = -1$ ($\theta_{12} = \pi$) のとき特異性があり、ソリトン衝突における soliton-2 の一時的な消失に関係するものと思われる。

運動方程式を求めるためにソリトン粒子の質量を定義する。ソリトンの運動量の z 成分、 $P_z = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{Z} d\sigma$ (「 \cdot 」は時間 τ についての微分を表す) は、soliton-1 と soliton-2 に対して、それぞれ、

$$P_{1z} = 4\gamma(1+v)v, \quad P_{2z} = -4\gamma(1-v)v$$

になるので、位相速度 $\pm v$ の係数として soliton-1 と soliton-2 の質量を

$$m_1 = 4\gamma(1+v), \quad m_2 = 4\gamma(1-v) \quad (12)$$

と定義する。すると、全質量 M と換算質量 μ は

$$M = m_1 + m_2 = 8\gamma,$$

$$\mu = \frac{2}{\gamma}$$

になる。

これらの質量を用いて、soliton-1 と soliton-2 の衝突前の漸近的位置 (8) と (9) から加速度を求め、(12) の質量 m_1 と m_2 を乗じたものを運動方程式と見なせば、 $p_n = m_n \dot{\sigma}_n$, ($n = 1, 2$) として、 $\dot{p}_n = \mathcal{F}_n$ の右辺は粒子にはたらく力である。従って、それぞれのソリトン粒子にはたらく力 \mathcal{F}_n は時間の関数として

$$\mathcal{F}_1 = m_1 \ddot{\sigma}_1 \approx -\frac{16\gamma^2 v^2 (1+v)(1-v^2) \cos \theta_{12} e^{2\gamma v\tau}}{1 + 4(1-v)(3+v) \cos \theta_{12} e^{2\gamma v\tau}}, \quad (13)$$

$$\mathcal{F}_2 = m_2 \ddot{\sigma}_2 \approx \frac{16\gamma^2 v^2 (1-v)(1-v^2) \cos \theta_{12} e^{2\gamma v\tau}}{1 + 4(1+v)(3-v) \cos \theta_{12} e^{2\gamma v\tau}} \quad (14)$$

になる。 $\cos \theta_{12} = 1$ のとき、 $\mathcal{F}_1 < 0, \mathcal{F}_2 > 0$ となりソリトン粒子間に斥力が、 $\cos \theta_{12} = -1$ のとき、 $\mathcal{F}_1 > 0, \mathcal{F}_2 < 0$ でソリトン粒子間に引力がはたらくことがわかる。

同様に、soliton-1 と soliton-2 の衝突後の漸近的位置 (10) と (11) から加速度を求め、質量 m_1 と m_2 を乗じて、各ソリトン粒子にはたらく力 \mathcal{F}_n ($n = 1, 2$) は

$$\mathcal{F}_1 = m_1 \ddot{\sigma}_1 \approx \frac{16\gamma^2 v^2 (1+v)(1-v^2) \cos \theta_{12} e^{-2\gamma v\tau}}{1 + 4(1-v)(3+v) \cos \theta_{12} e^{-2\gamma v\tau}}, \quad (15)$$

$$\mathcal{F}_2 = m_2 \ddot{\sigma}_2 \approx -\frac{16\gamma^2 v^2 (1-v)(1-v^2) \cos \theta_{12} e^{-2\gamma v\tau}}{1 + 4(1+v)(3-v) \cos \theta_{12} e^{-2\gamma v\tau}} \quad (16)$$

である。このときも、 $\cos \theta_{12} = 1$ のとき、 $\mathcal{F}_1 > 0, \mathcal{F}_2 < 0$ となり、やはりソリトン粒子間に斥力が、 $\cos \theta_{12} = -1$ のとき、 $\mathcal{F}_1 < 0, \mathcal{F}_2 > 0$ でソリトン粒子間に引力がはたらいている。これらは図 1 のソリトン衝突の様子を定性的に説明している。しかし、衝突の前後で、 $\dot{p}_1 + \dot{p}_2 = \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 \neq 0$ であるから、作用反作用の法則が成り立っていない。これは並進不変性が破れていることを意味する。

5 ソリトン粒子のモデル

前節では並進不変性が破れることから、ソリトン粒子の力学モデルとして素朴な運動方程式

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\sigma}_1 &= \frac{dV}{d\rho}, \\ m_2 \ddot{\sigma}_2 &= -\frac{dV}{d\rho} \end{aligned}$$

が成立しないことを示した。ここで、 ρ は相対座標であり、 V は有効ポテンシャルである。本節では、並進不変性を持つソリトン粒子モデルを考察する。並進不変性を持つ 2 ソリトン粒子モデルの候補は

$$L = \frac{1}{2} m_1(\rho) \dot{\sigma}_1^2 + \frac{1}{2} m_2(\rho) \dot{\sigma}_2^2 - V(\rho), \quad (17)$$

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{\sigma}_1^2 + \dot{\sigma}_1 A_{12}(\rho) + \frac{1}{2} m_2 \dot{\sigma}_2^2 + \dot{\sigma}_2 A_{21}(\rho) - V(\rho), \quad (18)$$

や (17) と (18) の組み合わせなどが考えられるが、ここでは運動方程式が一番簡単と思われるラグランジアン (18) を考える。 A_{nm} ($n, m = 1, 2, n \neq m$) をゲージ理論との類推から仮に「ゲージ場」と呼び、 V を有効ポテンシャルと呼ぶ。 A_{12} は soliton-2 が σ_1 の点に作り出す場、 A_{21} は soliton-1 が σ_2 の点に作り出す場と考え、この場が運動量の一部をソリトン間で媒介する。ラグランジアン (18) の作用積分 $S = \int d\tau L$ はゲージ変換

$$A'_{12} = A_{12} + \frac{\partial \Lambda}{\partial \sigma_1}, \quad A'_{21} = A_{21} + \frac{\partial \Lambda}{\partial \sigma_2}, \quad V' = V - \frac{\partial \Lambda}{\partial \tau}$$

に対して不変なので、形式的にゲージ不変性がある。従って、 A_{nm} を「ゲージ場」と呼ぶのはあながち誤りではない。

重心座標と相対座標を

$$\begin{aligned} \Sigma &= \frac{m_1 \sigma_1 + m_2 \sigma_2}{m_1 + m_2}, \\ \rho &= \sigma_2 - \sigma_1 \end{aligned}$$

で定義すれば、(18) から運動方程式

$$M \ddot{\Sigma} + \dot{\rho} \left(\frac{dA_{12}}{d\rho} + \frac{dA_{21}}{d\rho} \right) = 0, \quad (19)$$

$$\mu \ddot{\rho} = \dot{\Sigma} \left(\frac{dA_{12}}{d\rho} + \frac{dA_{21}}{d\rho} \right) - \frac{dV}{d\rho} \quad (20)$$

を得る。

ソリトン粒子の漸近的位置 (8) ~ (11) から、衝突前の重心座標と相対座標は

$$\Sigma \approx \frac{v}{4\gamma} \ln \frac{v^4(1 + 4 \cos \theta_{12} e^{2\gamma v \tau}) e^{4\gamma v \tau}}{1 + 4(2 - v^2) \cos \theta_{12} e^{2\gamma v \tau}}, \quad (21)$$

$$\rho \approx \frac{1}{2\gamma} \ln \frac{1 + 4(2 - v^2) \cos \theta_{12} e^{2\gamma v \tau}}{v^4(1 + 4 \cos \theta_{12} e^{2\gamma v \tau}) e^{4\gamma v \tau}} \quad (22)$$

で、衝突後の重心座標と相対座標は

$$\Sigma \approx -\frac{v}{4\gamma} \ln \frac{v^4(1 + 4 \cos \theta_{12} e^{-2\gamma v \tau}) e^{-4\gamma v \tau}}{1 + 4(2 - v^2) \cos \theta_{12} e^{-2\gamma v \tau}}, \quad (23)$$

$$\rho \approx -\frac{1}{2\gamma} \ln \frac{1 + 4(2 - v^2) \cos \theta_{12} e^{-2\gamma v \tau}}{v^4(1 + 4 \cos \theta_{12} e^{-2\gamma v \tau}) e^{-4\gamma v \tau}} \quad (24)$$

で与えられる。今の近似では重心座標と相対座標における対数の引数は同じものになるので、 $\Sigma = -\frac{v}{2}\rho$ である。

6 「ゲージ場」と有効ポテンシャル

「ゲージ場」とポテンシャルを相対座標 ρ の関数として表すために、方程式 (22) と (24) を逆に解いて、衝突前に $\xi = v^{-2}e^{-2\gamma\rho}$ 、衝突後に $\xi = v^{-2}e^{2\gamma\rho}$ である ξ の関数として、衝突前の $\chi = e^{2\gamma v \tau}$ 、衝突後の $\chi = e^{-2\gamma v \tau}$ を表しておく。このとき、方程式 (22) と (24) は衝突の前後で同じ形の 3 次方程式

$$4 \cos \theta_{12} \chi^3 + \chi^2 - 4(2 - v^2) \cos \theta_{12} \xi^2 \chi - \xi^2 = 0 \quad (25)$$

になる。これにも厳密解が存在するが、やや複雑な解なので物理的に有意な厳密解を ξ^2 まで展開し、衝突前と衝突後で、それぞれ、

$$e^{-2\gamma v \tau} \approx \frac{v^4 e^{2\gamma \rho}}{v^2 e^{\gamma \rho} + 2(1 - v^2) \cos \theta_{12}}, \quad (26)$$

$$e^{2\gamma v \tau} \approx \frac{v^4 e^{-2\gamma \rho}}{v^2 e^{-\gamma \rho} + 2(1 - v^2) \cos \theta_{12}} \quad (27)$$

を得る。

(21) ~ (24) より、重心座標と相対座標の速度と加速度は衝突前では、

$$\dot{\Sigma} \approx \frac{v^2[1 + 2(5 - v^2) \cos \theta_{12} e^{2\gamma v \tau}]}{1 + 4(3 - v^2) \cos \theta_{12} e^{2\gamma v \tau}}, \quad (28)$$

$$\dot{\rho} \approx \frac{-2v[1 + 2(5 - v^2) \cos \theta_{12} e^{2\gamma v \tau}]}{1 + 4(3 - v^2) \cos \theta_{12} e^{2\gamma v \tau}}, \quad (29)$$

$$\ddot{\Sigma} \approx \frac{-4\gamma v^3(1 - v^2) \cos \theta_{12} e^{2\gamma v \tau}}{[1 + 4(3 - v^2) \cos \theta_{12} e^{2\gamma v \tau}]^2}, \quad (30)$$

$$\ddot{\rho} \approx \frac{8\gamma v^2(1 - v^2) \cos \theta_{12} e^{2\gamma v \tau}}{[1 + 4(3 - v^2) \cos \theta_{12} e^{2\gamma v \tau}]^2} \quad (31)$$

なので、ソリトン粒子の重心の速度および加速度を用いて

$$M\ddot{\Sigma} \approx \frac{16v^2 \cos \theta_{12} e^{2\gamma v \tau}}{[1 + 4(3 - v^2) \cos \theta_{12} e^{2\gamma v \tau}]^2} + \frac{1 + 2(5 - v^2) \cos \theta_{12} e^{2\gamma v \tau}}{1 + 4(3 - v^2) \cos \theta_{12} e^{2\gamma v \tau}} \frac{d}{d\rho} (A_{12} + A_{21}) = 0 \quad (32)$$

と表されるのでモデル運動方程式 (19) と比較すれば,

$$\frac{d}{d\rho} (A_{12} + A_{21}) \approx \frac{-16v^2 \cos \theta_{12} e^{2\gamma v \tau}}{[1 + 2(5 - v^2) \cos \theta_{12} e^{2\gamma v \tau}][1 + 4(3 - v^2) \cos \theta_{12} e^{2\gamma v \tau}]}, \quad (33)$$

を得る。同様に相対速度と相対加速度を用いて

$$\mu\ddot{\rho} \approx \frac{16v^2 \cos \theta_{12} e^{2\gamma v \tau}}{1 + 4(3 - v^2) \cos \theta_{12} e^{2\gamma v \tau}} - \frac{dV}{d\rho} \quad (34)$$

なのでモデル運動方程式 (20) と比較して,

$$\frac{dV}{d\rho} \approx \frac{-16v^2 \cos \theta_{12} e^{2\gamma v \tau}}{[1 + 4(3 - v^2) \cos \theta_{12} e^{2\gamma v \tau}]^2} \quad (35)$$

を得る。(29) を利用して, ρ の積分を τ の積分に変換して実行し, (26) を用いれば, 「ゲージ場」とポテンシャルは

$$A_{12} + A_{21} \approx \frac{4 \cos \theta_{12} [v^2 + 2(1 - v^2) \cos \theta_{12} e^{-\gamma \rho}]}{\gamma v^2 [v^2 e^{\gamma \rho} + 4(3 - v^2) \cos \theta_{12}]},$$

$$V \approx \frac{16 \cos \theta_{12} [v^2 e^{\gamma \rho} + 2(1 - v^2) \cos \theta_{12}]}{[v^2 e^{\gamma \rho} + 4(3 - v^2) \cos \theta_{12}]^2}$$

になる。重心座標と相対座標の速度と加速度は, 衝突後には

$$\dot{\Sigma} \approx \frac{v^2 [1 + 2(5 - v^2) \cos \theta_{12} e^{-2\gamma v \tau}]}{1 + 4(3 - v^2) \cos \theta_{12} e^{-2\gamma v \tau}}, \quad (36)$$

$$\dot{\rho} \approx \frac{-2v [1 + 2(5 - v^2) \cos \theta_{12} e^{-2\gamma v \tau}]}{1 + 4(3 - v^2) \cos \theta_{12} e^{-2\gamma v \tau}}, \quad (37)$$

$$\ddot{\Sigma} \approx \frac{4\gamma v^3 (1 - v^2) \cos \theta_{12} e^{-2\gamma v \tau}}{[1 + 4(3 - v^2) \cos \theta_{12} e^{-2\gamma v \tau}]^2}, \quad (38)$$

$$\ddot{\rho} \approx \frac{-8\gamma v^2 (1 - v^2) \cos \theta_{12} e^{-2\gamma v \tau}}{[1 + 4(3 - v^2) \cos \theta_{12} e^{-2\gamma v \tau}]^2} \quad (39)$$

であるから, やはりモデル運動方程式 (19) および (20) と比較して,

$$\frac{d}{d\rho} (A_{12} + A_{21}) \approx \frac{16v^2 \cos \theta_{12} e^{-2\gamma v \tau}}{[1 + 2(5 - v^2) \cos \theta_{12} e^{-2\gamma v \tau}][1 + 4(3 - v^2) \cos \theta_{12} e^{-2\gamma v \tau}]},$$

$$\frac{dV}{d\rho} \approx \frac{16v^2 \cos \theta_{12} e^{-2\gamma v \tau}}{[1 + 4(3 - v^2) \cos \theta_{12} e^{-2\gamma v \tau}]^2} \quad (40)$$

となる。衝突前のときと同様に, (37) を利用して積分し, (27) を用いれば

$$A_{12} + A_{21} \approx \frac{4 \cos \theta_{12} [v^2 + 2(1 - v^2) \cos \theta_{12} e^{\gamma \rho}]}{\gamma v^2 [v^2 e^{-\gamma \rho} + 4(3 - v^2) \cos \theta_{12}]},$$

$$V \approx \frac{16 \cos \theta_{12} [v^2 e^{-\gamma \rho} + 2(1 - v^2) \cos \theta_{12}]}{[v^2 e^{-\gamma \rho} + 4(3 - v^2) \cos \theta_{12}]^2}$$

を得る。

これらはポテンシャルの漸近的なものなので近似の範囲を踏み越えるが、全域にわたるソリトン粒子の相互作用を含んだ力学を構築するため、これらのポテンシャルを

$$\begin{aligned} A_{12} + A_{21} &= \frac{2 \cos \theta_{12} [v^2 + (1 - v^2) \cos \theta_{12} \operatorname{sech} \gamma \rho]}{\gamma v^2 [v^2 + 2(3 - v^2) \cos \theta_{12} \operatorname{sech} \gamma \rho]} \operatorname{sech} \gamma \rho, \\ V &= \frac{8 \cos \theta_{12} [v^2 + (1 - v^2) \cos \theta_{12} \operatorname{sech} \gamma \rho]}{[v^2 + 2(3 - v^2) \cos \theta_{12} \operatorname{sech} \gamma \rho]^2} \operatorname{sech} \gamma \rho \end{aligned} \quad (41)$$

と ρ の全域に拡張する。ポテンシャルの形状を図 2 に示した。遠距離では有効ポテンシャル V が支配的で、近距離では「ゲージ場」 A_{nm} が支配的である。すなわち、近距離では運動量移動が大きい。 $\cos \theta_{12} = 1$ の場合、 V の原点付近でくぼみ (引力効果) があり、 $\cos \theta_{12} = -1$ のとき、soliton-2 の消失に対応すると思われる特異性が現れ、 $\cos \theta_{12} = 1$ とは逆に原点付近には斥力領域が現れる。これらは運動量移動の効果と思われる。

ポテンシャルの高さはどちらも概ね v^2 に反比例し、 $|v|$ が大きくなると低くなる。

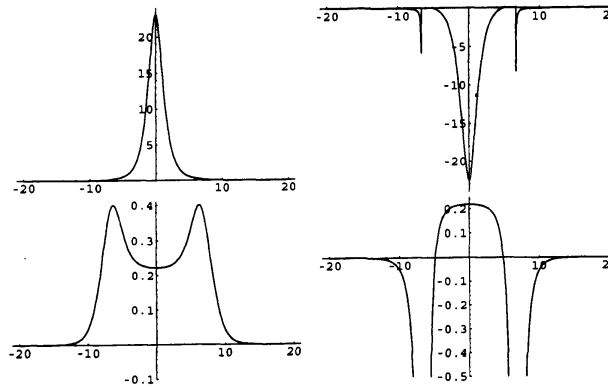


図 2 potentials, 左が $\theta_{12} = 0$, 右が $\theta_{21} = \pi$ の場合で, 上が $A_{12} + A_{21}$, 下が V である。($v = 0.12$)

7 Summary

本稿ではソリトン粒子間にはたらく力 (13) ~ (16) を求めたとき破れていた並進不変性を回復させるため、連立非分散方程式のソリトン粒子の相互作用に新たに運動量を運ぶ「ゲージ場」 A_{nm} を導入し、この A_{nm} とともに電磁気学のスカラーポテンシャルに対応する有効ポテンシャル V を求めた。ソリトン粒子の力学がゲージ不変であることを示した。位相シフトを含むソリトン粒子の漸近解 (8) ~ (11) を満足する運動方程式

$$\begin{aligned} M\ddot{\Sigma} + \dot{\rho}a &= 0, \\ \mu\ddot{\rho} &= \dot{\Sigma}a - \frac{dV}{d\rho} \end{aligned}$$

を, すなわち, ソリトン粒子の力学を構成した。ここで a は「ゲージ場」の導関数 $a = \frac{d(A_{12}+A_{21})}{d\rho}$ で有効ポテンシャルの導関数 $\frac{dV}{d\rho}$ とともに (41) から求め,

$$a = \frac{-2 \cos \theta_{12} \{v^4 + 2(1-v^2) \cos \theta_{12} [v^2 + (3-v^2) \cos \theta_{12} \operatorname{sech} \gamma \rho] \operatorname{sech} \gamma \rho\}}{v^2 [v^2 + 2(3-v^2) \cos \theta_{12} \operatorname{sech} \gamma \rho]^2} \operatorname{sech} \gamma \rho \tanh \gamma \rho,$$

$$\frac{dV}{d\rho} = \frac{-8v^2 \cos \theta_{12} (v^2 - 4 \cos \theta_{12} \operatorname{sech} \gamma \rho)}{[v^2 + 2(3-v^2) \cos \theta_{12} \operatorname{sech} \gamma \rho]^3} \operatorname{sech} \gamma \rho \tanh \gamma \rho$$

である。なお, 本稿の近似では弾く相互作用は再現しないと思われる。

このソリトン方程式の場合, 原理的には全ての領域で計算が可能であるが, (7) の厳密解の複雑さ故に全体を同時に扱うのは困難である。本稿で求めたポテンシャルは残念ながら近距離の相互作用は十分に記述していない。従って, 図 2 のポテンシャルの挙動は原点付近では不確かなものである。近距離相互作用は別に求める必要があるであろう。しかし, 例えば, 図 1 の左の図のような相互作用は斥力によりソリトンが減速している間に運動量が移動している様子がかがえる。 $|v|$ が大きいとポテンシャルは低くなり, 斥力の場合, 相対速度が小さくなっていくが, 運動量移動が大きくなる前に粒子がポテンシャルを通過してしまうと考えられる。このようなことから図 2 の様に近距離で運動量移動が大きくなるのは自然なことに思える。なお, 本稿で述べた定式化はソリトン粒子の運動を記述する漸近解を求め, これを満足する運動方程式を探すといういわゆる逆問題に相当する。さらには KdV 方程式など他のソリトン方程式にも適用しうる。

残る課題としては全ての ρ での有効ポテンシャルと「ゲージ場」はどの程度正しいか, ゲージ不変な「ゲージ場」に対する方程式はどのようになるか, 特異性の存在は小さいソリトンの消失に対応するか, などがあげられる。

参考文献

- [1] 例えば, M. J. Ablowitz and H. Segur, "SOLITONS AND THE INVERSE SCATTERING TRANSFORM", SIAM, 1981.
- [2] 角島浩, 紺野公明, 「ソリトン相互作用の有効ポテンシャル」, 数理解析研究所講究録 1701 「波動現象の数理と応用」, p.197, 京都大学数理解析研究所, 2010 年
- [3] 角島浩, 「ソリトン相互作用の有効ポテンシャル II」, 数理解析研究所講究録 1761 「非線形波動現象の多様性と普遍性」, p.118, 京都大学数理解析研究所, 2011 年
- [4] H. Kakuhata and K. Konno, J. Phys. Soc. Jpn. **68** (1999) 757.
- [5] H. Kakuhata and K. Konno, Theor. Math. Phys. **65** (2002) 713.
- [6] F. Abdullaev, S. Darmanyan and P. Khabibullaev, *Optical Solitons*, Springer-Verlag, 1993.